# Continuidad y límite funcional. Derivadas

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

# Continuidad en un punto

Una función, $f : A \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es **continua** en un punto $a \in A$ cuando se verifica que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x \leqslant a$ (resp. por $a \leqslant x < a + \delta$), se dice que $f$ es **continua por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en $a$.

**Observaciones.** • Para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto.
• En la definición de continuidad el conjunto $A$ tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de $f$ en $A$, lo que le pueda pasar a $f$ fuera de $A$ no nos interesa.

Se dice que $f$ es continua en $A$, si $f$ es continua en todo punto de $A$.

**Propiedades de las funciones continuas**

• *Las funciones suma y producto y cociente de funciones continuas son funciones continuas.*

• *La composición de funciones continuas es una función continua.*

• *Todas las funciones elementales son continuas en sus dominios naturales de definición.*

**Teorema de Bolzano.** *Toda función **continua** en un **intervalo** que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.* Es decir, si $f$ es una función continua definida en un intervalo $I$, $a < b$ son dos puntos de $I$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces hay algún punto $c \in ]a,b[$ en el que $f$ se anula, $f(c) = 0$.

**Teorema del valor intermedio.** *El rango o recorrido de una función **continua** en un **intervalo** es un intervalo.* Es decir, si $f$ es una función continua definida en un intervalo $I$, entonces $J = f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ es un intervalo.

Una consecuencia del teorema de Bolzano es que *toda función polinómica de grado impar con coeficientes reales tiene alguna raíz real.*

## Extremos absolutos

- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en $A$ un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.
- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en $A$ un **mínimo absoluto** si hay algún punto $u \in A$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$.

**Teorema de existencia de extremos absolutos (Weierstrass).** *Toda función continua en un intervalo **cerrado y acotado** alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

*Equivalentemente, el recorrido de una función continua $f$ en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, es también un intervalo cerrado y acotado: $f\big([a,b]\big) = [m,M]$.*

Una consecuencia del teorema de Weierstrass es que *una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$, y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.*

**Idea intuitiva de límite de una función en un punto.**

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a $x$ valores próximos a cero obtenemos

$f(0.04) = 0.999733, f(0.03) = 0.99985, f(0.02) = 0.999933, f(0.01) = 0.999983$

y comprobamos que cuanto más nos acercamos al valor $x = 0$, el valor de la función se acerca cada vez más a 1.Esto lo expresamos matemáticamente de la forma

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

**Límite de una función en un punto.** Sea $I$ un intervalo, $a \in I$, y $f$ una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que $f$ tiene límite en el punto $a$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in I, \ x \neq a \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de $f$ en $a$** y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x < a$ (resp. por $a < x < a + \delta$), se dice que $f$ tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en $a$. Dichos límites se representan simbólicamente por $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L$ (resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L$).

**Relación entre límite y continuidad.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Se verifica que $f$ es continua (por la derecha, por la izquierda) en $a$ si, y sólo si, $f$ tiene límite (por la derecha, por la izquierda) en $a$ y dicho límite es igual a $f(a)$.

**Clasificación de las discontinuidades.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si $f$ tiene límite en $a$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que $f$ tiene en el punto $a$ una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de $f$ en $a$ existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$
se dice que $f$ tiene en el punto $a$ una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que $f$ tiene en el punto $a$ una **discontinuidad esencial**.

**Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales).** Se dice que $f$ **es positivamente divergente** en $a$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x < a$ (resp. por $a < x < a+\delta$),se dice que $f$ es **positivamente divergente por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en $a$.Y simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ (resp.

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior cambiamos $+\infty$ por $-\infty$ entonces tenemos las definiciones de **negativamente divergente** en $a$ que se expresan simbólicamente por

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$$

**Límites en infinito (asíntotas horizontales).** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que $f$ tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de $f$ en $+\infty$**, y escribimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

**Funciones divergentes en infinito.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que $f$ es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \;:\; \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Análogamente se define el significado de:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

**Álgebra de límites.** Supongamos que $f$ y $g$ tienen límite en $a$ donde aceptamos que $a$ puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y $fg$ tienen límite en $a$ y
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$

**Funciones asintóticamente equivalentes.** Se dice que dos funciones $f$ y $g$ son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x) (x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

**Para calcular el límite de un producto o de un cociente de dos funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.**

**Límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función racional**

Sea $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$ una función polinómica. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n} = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \frac{c_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_0}{x^n}$$

Se deduce que $P(x) \sim c_n x^n$ para $x \to \pm\infty$.

Sea $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ otra función polinómica. Tenemos que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{c_n x^n}{b_m x^m} = \frac{c_n}{b_m} x^{n-m} \quad (x \to \pm\infty)$$

Suponiendo que $\frac{c_n}{b_m} > 0$, deducimos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \quad n-m \text{ par} \\ -\infty, & n > m \quad n-m \text{ impar} \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases}$$

## Escala de infinitos

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha} \left|\ln x\right|^{\mu} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{e^{\mu x}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu > 0$.

# Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "$1^\infty$" y "$0\infty$".

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty}$$

# Derivadas

## Velocidad instantánea.

Consideremos un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo $t$, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$.La velocidad media del móvil, medida en metros por segundo, en un intervalo de tiempo de $t$ a $t_0$ viene dada por

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

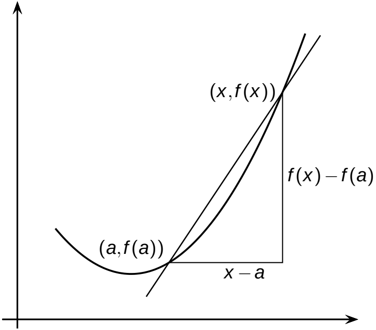
Si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños llegamos al concepto de "velocidad instantánea", $v(t_0)$, que sería la velocidad que tiene el móvil en el *instante* $t_0$.Se trata de un concepto teórico de gran utilidad para estudiar el movimiento, pero no puede medirse porque un instante no tiene duración.Su formulación matemática es

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Observa que el cociente $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ no está definido para $t=t_0$.

# Secantes y tangentes.

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente.La estrategia consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente.



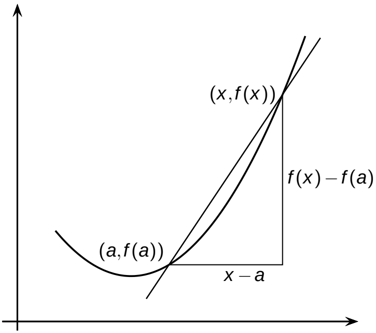
# Secantes y tangentes.

Consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de $f$.Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando el punto $x$ se aproxima *“infinitamente”* al punto $a$, la **pendiente de la tangente** vendrá dada por:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



# Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra $I$ representará un intervalo de números reales.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de $f$ en $a$** y lo representaremos por $f'(a)$.

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de $I$, la **función derivada** de $f$ es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de $f$ en dicho punto.

***Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.***

# Rectas tangente y normal

Supuesto que $f$ es derivable en $a$, la recta de ecuación cartesiana:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de $f$ en el punto $(a, f(a))$, y también recta tangente a $f$ en $x = a$.

Cuando $f'(a) \neq 0$, la recta de ecuación:

$$\boxed{y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)}$$

es la **recta normal** a la gráfica de $f$ en el punto $(a, f(a))$, y también recta normal a $f$ en $x = a$

# Derivadas de sumas, productos y cocientes

La funciones suma, $f+g$, y producto, $fg$, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que $f$ y $g$ sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

La función cociente $f/g$ es derivable en todo punto $a \in I$ en el que $f$ y $g$ sean derivables y $g(a) \neq 0$, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

**Las funciones elementales son derivables en todo punto de su dominio natural de definición.**

# Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que $f$ es derivable en $a \in I$ y que $g$ es derivable en $f(a)$. Entonces $h$ es derivable en $a$ y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

La regla práctica es que una composición de funciones se deriva de forma inversa a como se evalúa.

$$(u \circ v \circ w)'(x) = u'(v(w(x))v'(w(x))w'(x)$$

# Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que $f$ tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[ \subset I$.

2) Para todo $x \in ]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in ]a-r, a+r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que el máximo relativo es *estricto*.

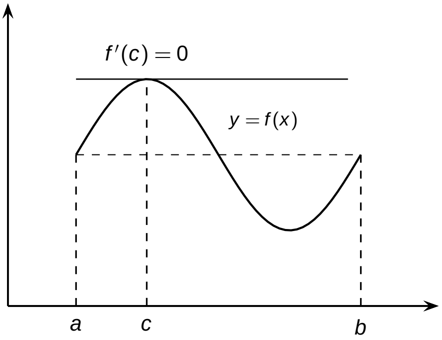
Análogamente se define el concepto de *"mínimo relativo"*. La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

**Condición necesaria de extremo relativo.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que $f$ tiene un *extremo relativo* en $a$ y que $f$ *es derivable en* $a$. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** de dicha función.

# Teorema de Rolle

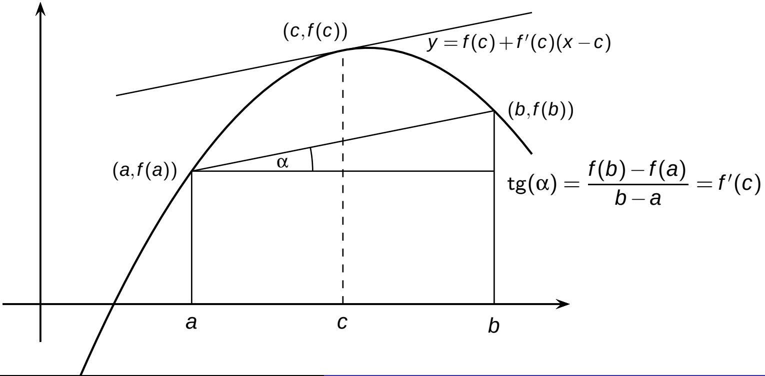
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in ]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.



# Teorema del valor medio

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces existe algún punto $c \in ]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



# Consecuencias del teorema del valor medio

Sea $f$ una función derivable en un intervalo $I$, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in I$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces $f$ es constante en $I$.

**Derivabilidad y monotonía**

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Se verifica entonces que:

- Si para todo $x \in ]a,b[$ es $f'(x) > 0$ entonces $f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$.
- Si para todo $x \in ]a,b[$ es $f'(x) < 0$ entonces $f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

**Criterio de extremo absoluto**

Sea $f$ una función **derivable en un intervalo $I$**, **cuya derivada se anula en $I$ en un único punto** $c \in I$. Supongamos que hay puntos $a, b \in I$ tales que $a < c < b$. Entonces se verifica que

- Si $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$, $f$ alcanza en $c$ un mínimo absoluto estricto en $I$.
- Si $f'(a) > 0$ y $f'(b) < 0$, $f$ alcanza en $c$ un máximo absoluto estricto en $I$.

# Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo $I$ con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces $f$ es una biyección de $I$ sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en $J$ siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Como ejemplo podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas “inversas”.

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \quad \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

# Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f$ y $g$ funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in ]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Si $n$ es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que $f$ es *$n$ veces derivable en un punto $a \in I$*, si $f$ es $n-1$ veces derivable en $I$ y la función $f^{(n-1}$ es derivable en $a$.

Se dice que $f$ es una función de clase $C^n$ en $I$ si $f$ es $n$ veces derivable $I$ y la función $f^{(n}$ es continua en $I$.

Se dice que $f$ es una función de clase $C^\infty$ en $I$ si $f$ tiene derivadas de todos órdenes en $I$.

Por convenio se define $f^{(0} = f$.

# Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean $I$ un intervalo, $a$ un punto de $I$ que no es extremo de $I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en $a$. Supongamos que todas las derivadas de $f$ hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en $a$, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si $n$ es par y $f^{(n}(a) > 0$, $f$ tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en $a$.
- Si $n$ es par y $f^{(n}(a) < 0$, $f$ tiene un *máximo* ***relativo*** *estricto* en $a$.
- Si $n$ es impar entonces $f$ no tiene extremo relativo en $a$.

Este resultado es útil para estudiar extremos relativos pero ***no proporciona condiciones suficientes de extremo absoluto***.

# Polinomios de Taylor

Sea $f$ una función $n$ veces derivable en un punto $a$. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$\boxed{T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

se llama el **polinomio de Taylor de orden $n$ de $f$ en $a$.**

# Teorema de Taylor

Sea $f$ una función $n+1$ veces derivable en un intervalo $I$. Dados dos puntos cualesquiera $x,a$ en $I$ con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto $c$ en el intervalo abierto de extremos $a$ y $x$ tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Si para una función dada y para valores concretos de $a$, $x$, $n$ y $\varepsilon > 0$, podemos probar una desigualdad de la forma

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} < \varepsilon$$

Entonces podemos asegurar que $|f(x) - T_n(f,a)(x)| < \varepsilon$, es decir, el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$ es menor que $\varepsilon$.

# Funciones convexas y funciones cóncavas

Se dice que una función es **convexa** en un intervalo $I$ si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de $f$ en $I$ queda siempre por encima de la gráfica de $f$.

Se dice que una función es **cóncava** en un intervalo $I$ si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de $f$ en $I$ queda siempre por debajo de la gráfica de $f$.

Ejemplos típicos de funciones convexas son las parábolas "hacia arriba" y la exponencial. Ejemplos típicos de funciones cóncavas son las parábolas "hacia abajo" y el logaritmo.

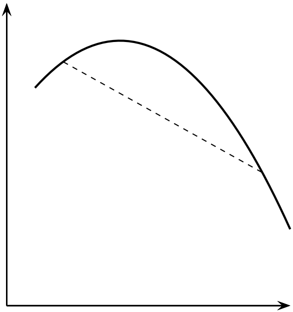


Figure. Función cóncava

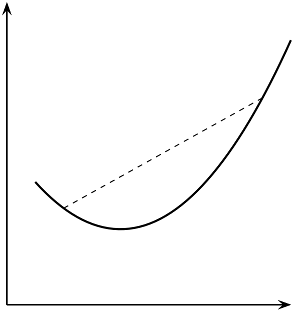


Figure. Función convexa

# Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que $f$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Si la derivada de $f$ es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a,b[$ entonces $f$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

En particular si $f$ es dos veces derivable en $]a,b[$ y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in ]a,b[$, entonces $f$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

Interpretando la derivada primera como la velocidad y la derivada segunda como la aceleración, las curvas convexas aceleran y las cóncavas frenan.

# Puntos de inflexión

Se dice que $a$ es un **punto de inflexión** de una función $f$, si hay un número $r > 0$ tal que $f$ es cóncava en el intervalo $]a-r,a[$ y $f$ es convexa en el intervalo $]a,a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si $f$ tiene un punto de inflexión en $a$ y es dos veces derivable en $a$, entonces $f''(a) = 0$.

Condición suficiente:

Si $f$ es tres veces derivable en un punto $a$ y se tiene que $f''(a) = 0$ pero $f'''(a) \neq 0$, entonces $f$ tiene un punto de inflexión en $a$.